Aplicações da Derivada

Neste ponto voltaremos ao estudo de um problema físico. A necessidade dessa volta é motivada pela procura de alguns resultados envolvendo funções e derivadas que serão úteis para um grande número de aplicações que pretendemos desenvolver. É óbvio que os resultados pretendidos não ficarão restritos ao problema físico que apresentaremos. Na realidade eles serão verdadeiros para uma classe muito grande de funções e poderiam ser obtidos sem nenhuma menção a algum fato concreto. No entanto, o leitor deve ter observado que a conduta que temos empregado neste texto de cálculo é fundamentada pela formalização de conceitos e proposições motivadas a partir de fatos concretos. Acreditamos ser também esse o comportamento que leitor deva ter ao estudar o Cálculo. Encorajamos o leitor a manter sempre em mente os pontos de vista físicos ou geométricos na abordagem dos conceitos e proposições do Cálculo, pois através dessa visão esses conceitos e proposições ganharão profundidade e alcance. Além da Física e da Geometria existem vários outros campos de aplicação do Cálculo e, além disso, a teoria que desenvolvemos neste texto poderia ser formalizada independente de qualquer modelo de aplicação. No entanto, a importância da Física e da Geometria reside no fato de que elas, basicamente, forneceram elementos para que a Matemática, não só o Cálculo, se tornasse, enfim, uma Ciência.

Nesta seção, deixaremos alguns resultados sem as devidas provas, as quais fogem do alcance do rigor que pretendemos dar a esse texto. No entanto, para esses casos, procuraremos sempre dar testemunhos concretos da validade das afirmações.

Passemos, então, à apresentação e análise do problema. O problema físico que examinaremos é o do lançamento de um objeto, por exemplo, uma pedra, na vertical. É conhecido da Física que, se v_0 for a velocidade inicial, g a aceleração da gravidade e decorrido um tempo t, a equação do movimento é dada por

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Feito o lançamento, à medida que o corpo sobe, a velocidade do objeto lançado vai diminuindo em virtude da aceleração da gravidade, que age em sentido contrário ao movimento. Assim, o espaço percorrido (altura) será cada vez menor em intervalos de tempos iguais. Com o passar do tempo, o objeto atingirá o repouso e, a partir daí, fatalmente começará a cair. Nesse momento o aspecto do movimento inverterá uma vez que a velocidade e a aceleração estarão num mesmo sentido; essa situação permanecerá até que o objeto atinja novamente o chão. Durante o intervalo de realização do movimento, intervalo esse compreendido desde o arremesso até a volta do objeto, várias situações podem ser analisadas. Comecemos dividindo o movimento em três etapas: a primeira, quando o objeto está subindo; a segunda em que ele atinge o repouso e, finalmente, a terceira que se inicia quando o objeto começa a cair.

A equação do movimento nos oferece h como função do t:

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Na primeira etapa do movimento, à medida que o tempo passa, o objeto vai ganhando altura. É a fase de crescimento da altura. Nesta fase, se t_1 e t_2 são dois instantes e se $t_1 < t_2$ teremos $h(t_1) < h(t_2)$. Diremos neste caso que $h(t)$ é uma função estritamente crescente. Na terceira etapa, aquela em que o objeto está caindo, o tempo continua a crescer e, no entanto a altura diminui. É a fase de decrescimento da altura, no sentido de que, se t_3 e t_4 são dois instantes e se $t_3 < t_4$, teremos $h(t_3) > h(t_4)$. Neste caso, diremos que $h(t)$ é uma função estritamente decrescente.

Separando estas duas fases, encontra-se aquela na qual o corpo atinge o repouso. Um fato importante aqui é que, enquanto a primeira e a terceira fases se realizam num intervalo de tempo, a segunda é instantânea, isto é, ela ocorre exatamente para um único valor de t, digamos t_0. Para qualquer valor de t à esquerda de t_0 o corpo está subindo e, para qualquer valor à direita de t_0, o corpo está descendo. Em t_0 ele atinge a sua posição mais alta. Em razão disso, dizemos que em t_0 a função:

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

possui um máximo absoluto. Isto significa que, de todos os pontos do domínio dessa função, é em t_0 que h assume o seu maior valor.

Analisemos, agora, o que acontece com a velocidade do objeto em questão. No início do movimento temos a velocidade inicial v_0 e, a partir do arremesso, ainda na primeira fase, a altura h é crescente, mas, no entanto, a velocidade diminui com o tempo, devido à aceleração da gravidade. Como o movimento concorda com a orientação de h (sentido positivo: de baixo para cima), a velocidade é positiva. A velocidade torna-se nula na segunda fase do movimento, ou seja, em t_0 e, na terceira fase, torna-se negativa, pois o movimento realiza-se em sentido contrário à orientação de h. Um resumo dessa situação é apresentado em seguida:

1ª Fase: h crescente	————	Velocidade positiva
2ª Fase: h máximo	————	Velocidade nula
3ª Fase: h decrescente	————	Velocidade negativa

Como falamos anteriormente, a segunda fase do movimento possui uma característica destacada das outras. Ela ocorre instantaneamente, ao passo que as outras ocorrem em intervalos de tempo. Ao mesmo tempo em que ela caracteriza um valor extremo para h, ela é crítica para a velocidade. Naquele instante a velocidade é zero. Devido à importância desse fato, para os estudos que virão, vamos deixa-lo destacado:

h atinge o máximo em t_0 e nesse instante a velocidade é zero.

O movimento de lançamento na vertical representado num gráfico espaço (altura) x tempo veja Fig. 1, reproduz todas as situações apresentadas anteriormente. Aliando ao fato físico a interpretação geométrica da derivada, a Fig. 2 apresenta a variação da velocidade do objeto. Como a velocidade é dada pela derivada de $h(t)$ em relação ao tempo, ela coincide numericamente com o valor do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $h(t)$ em cada ponto; assim na Fig. 2 os instantes t_1 e t_4, o primeiro à esquerda de t_0 e o segundo, à direita, de t_0 refletem o comportamento de $v = dh/dt$ nas fases em que ela é positiva e negativa, respectivamente. No instante t_0, no qual a velocidade é nula, a tangente é horizontal. Com estes últimos fatos encerra-se a análise do movimento obtido pelo lançamento de um objeto na vertical. O leitor observará a importância dessa análise anterior nos fatos que destacaremos a seguir.

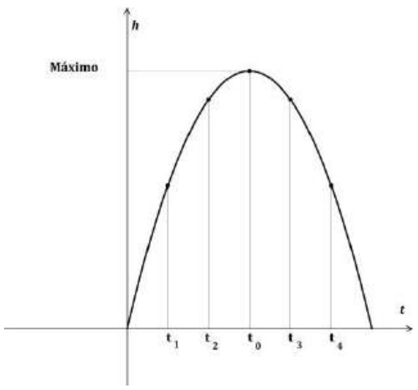


Fig. 1

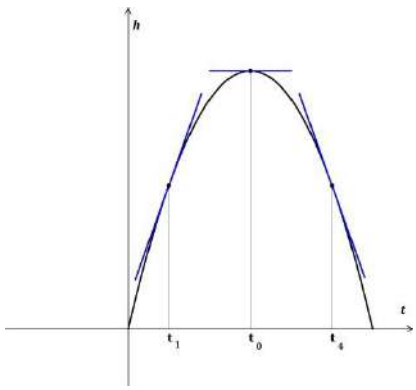


Fig. 2

Para obter resultados gerais e tentar formalizar fatos teóricos também gerais, a primeira coisa que devemos fazer é libertarmo-nos do modelo (no caso, modelo físico). Procedendo assim passemos a analisar o comportamento da função:

$$y = ax - bx^2$$

onde a e b são números reais positivos, tentando responder as seguintes perguntas acerca da função dada:

1) para quais valores de x, y é crescente;
2) para quais valores de x, y é decrescente;
3) y atinge um valor máximo? Caso afirmativo, qual é o valor de x em que y é máximo?

O que era válido antes é que em cada uma das fases anteriores a *derivada* (naquele caso a *velocidade*) possuía um comportamento bem destacado, o qual repetimos a seguir:

1ª Fase: y crescente	————	Derivada positiva
2ª Fase: y máximo	————	Derivada nula
3ª Fase: y decrescente	————	Derivada negativa

Sendo assim, devemos obter, inicialmente, a derivada da função dada. Como

$$y = ax - bx^2,$$

teremos:

$$\frac{dy}{dx} = a - 2bx.$$

Resposta da primeira pergunta:

$$\frac{dy}{dx} > 0 \Rightarrow a - 2bx > 0 \Rightarrow 2bx < a \Rightarrow x < \frac{a}{2b}$$

Portanto, y deve ser crescente à esquerda de $x_0 = a/2b$.

Resposta da segunda pergunta:

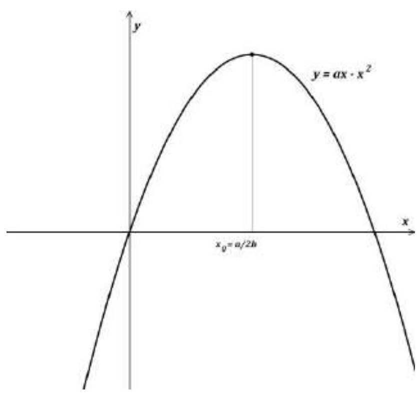
$$\frac{dy}{dx} < 0 \Rightarrow a - 2bx < 0 \Rightarrow 2bx > a \Rightarrow x > \frac{a}{2b}$$

Portanto, y deve ser decrescente à direita de $x_0 = a/2b$.

Resposta da terceira pergunta:

Como y deve ser crescente à esquerda de $x_0 = a/2b$ e decrescente à sua direita, em x_0 ocorre a transição de crescente para decrescente. Neste valor x_0 ocorrerá o valor *máximo* de y e, é claro, este é o valor para o qual a derivada $\frac{dy}{dx}$ é igual a zero.

Estas conclusões sendo corretas, o gráfico de $y = ax - bx^2$ deverá ser o seguinte:



Deixamos para o leitor o trabalho de comparar com o que ele sabe acerca da variação do *trinômio do 2º grau* e a construção do seu gráfico. Com certeza, ele irá concluir que o estudo desenvolvido aqui coincide integralmente com aquele.

Exercício 9.1

1) Faça, como no texto, um estudo idêntico para as funções:

$$y = 12x - 3x^2 \quad \text{e} \quad y = 4 - 18x - 3x^2$$

2) Estude como antes o comportamento da função $y = bx^2 + ax$, onde a e b são números reais positivos. Como você acha que deve se chamar o valor de y, para $x_0 = -a/2b$?

O exposto para o *trinômio do 2º grau* pode ser generalizado para um número muito grande de funções. É claro que as noções de funções crescentes e funções decrescentes, assim como de máximos e mínimos de funções, existem independentemente delas serem deriváveis; no entanto, introduzindo a hipótese de diferenciabilidade dessas funções, estas noções podem ser tratadas de maneira simples.

Primeiramente formalizaremos esses resultados e, depois, faremos as aplicações. Comecemos com as definições:

Definição 9.1

Diz-se que uma função $y = f(x)$ é crescente num intervalo I se, para quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, ocorrer $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definição 9.2

Diz-se que uma função $y = f(x)$ é decrescente num intervalo I se, para quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, ocorrer $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Definição 9.3

Diz-se que uma função $y = f(x)$ é estritamente crescente num intervalo I se, para quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, ocorrer $f(x_1) < f(x_2)$.

Definição 9.4

Diz-se que uma função $y = f(x)$ é estritamente decrescente num intervalo I se, para quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, ocorrer $f(x_1) > f(x_2)$.

Exercício 9.2

1) Dê exemplo de uma função que satisfaça a Definição 9.1.
2) Idem, para a Definição 9.2.
3) Satisfaça 9.1 e não satisfaça 9.3.
4) Satisfaça 9.3 e não satisfaça 9.1. É possível?
5) Satisfaça 9.2 e não satisfaça 9.4. É possível?
6) Satisfaça 9.4 e não satisfaça 9.2. É possível?

Definição 9.5

Diz-se que uma função $y = f(x)$ possui um máximo local (ou relativo) em x_0, se existir um intervalo aberto de seu domínio contendo x_0, tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x nesse intervalo.

Definição 9.6

Diz-se que uma função $y = f(x)$ possui um mínimo local (ou relativo) em x_0, se existir um intervalo aberto de seu domínio contendo x_0, tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x nesse intervalo.

Observação:

A imagem $f(x_0)$ onde x_0 é um máximo local de f (mínimo local de f) é denominado valor máximo local de f (valor mínimo local de f).

Apresentamos a seguir algumas situações para exemplificar as definições anteriores.

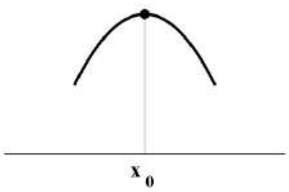


Fig. 4

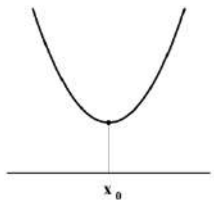


Fig. 5

Fig. 6

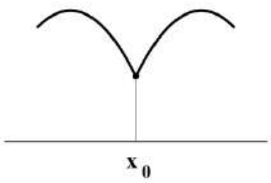


Fig. 7

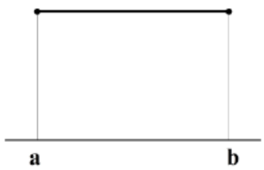


Fig. 8

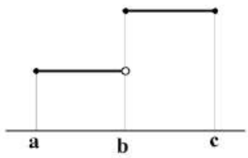


Fig. 9

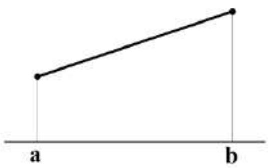


Fig. 10

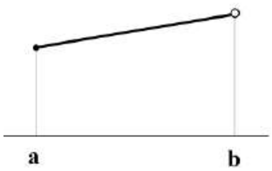


Fig. 11

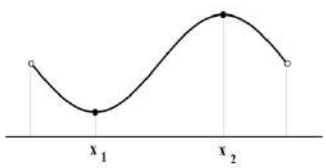


Fig. 12

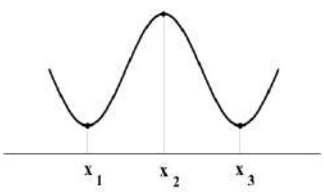


Fig. 13

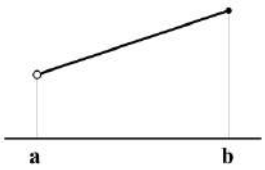


Fig. 14

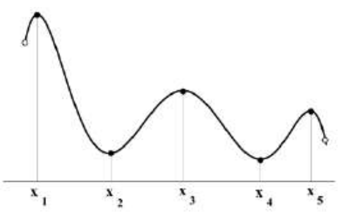
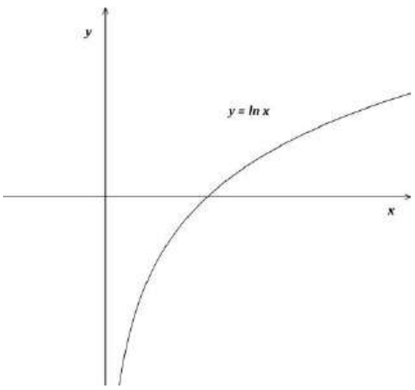
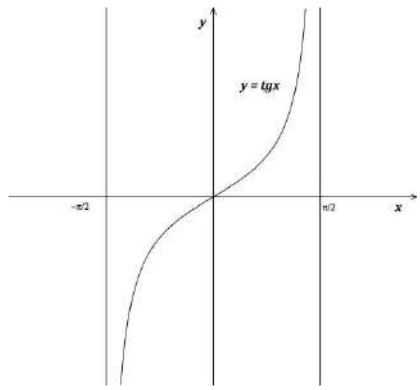


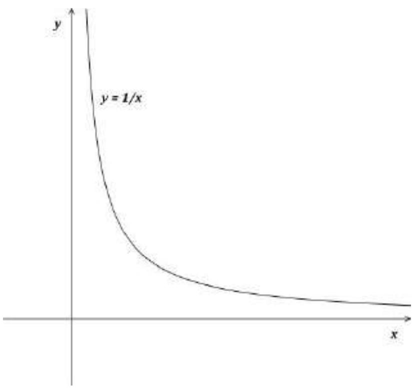
Fig. 15

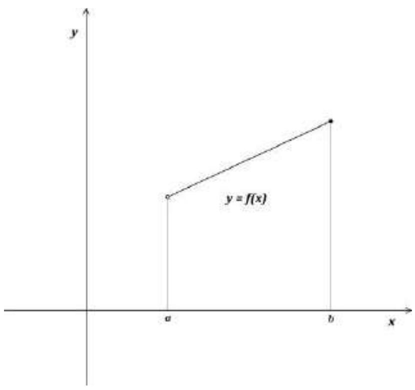
Procure identificar nas figuras anteriores os diversos pontos de máximo ou de mínimo e identifique, também, os vários comportamentos de crescimento ou decrescimento das correspondentes funções de acordo com as definições dadas.

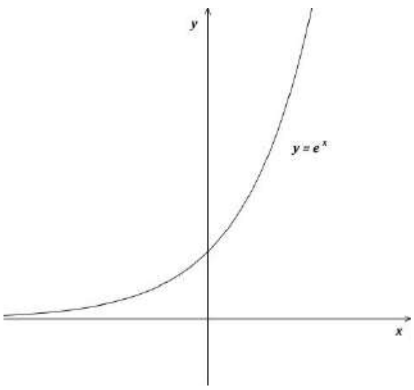
Analisando, mais especificamente, a situação exposta na Fig. 15, observamos a necessidade de introduzir uma nova terminologia. Observe que essa figura apresenta em destaque cinco pontos: três máximos locais (x_1, x_3 e x_5) e dois mínimos locais (x_2 e x_4). Dentre os máximos, em x_1, ocorre o maior dos valores máximos locais da função e, em x_4, o menor dos valores mínimos locais da função. Para pontos com essas características são acrescentados os conceitos de máximo absoluto, para denominar o maior dos valores máximos locais e, mínimo absoluto, para denominar o menor dos valores mínimos locais. Assim, no caso da Fig. 15, em x_1, ocorrer o máximo absoluto da função e, em x_4 o mínimo absoluto. Os máximos ou mínimos absolutos podem ocorrer em pontos interiores do domínio da função, neste caso coincidindo com um máximo ou um mínimo local ou, também em extremos de intervalos quando estes pertencerem ao domínio da função. No caso da Fig. 10, o máximo absoluto ocorre em $x = b$ e o mínimo absoluto ocorre em $x = a$. Nessas circunstâncias é natural ocorrer uma pergunta: uma função $y = f(x)$ sempre possuirá máximo ou mínimo absoluto? A resposta é NÃO! As funções seguintes mostram algumas dessas situações.











Quando da introdução do estudo da *integral definida* enunciamos o *Teorema da Existência de Máximo e Mínimo* para uma *função contínua num intervalo fechado*. É esse teorema que justifica a resposta anterior. Devido à sua importância repetiremos agora o seu enunciado:

Teorema da existência de máximo e mínimo (Teorema 8.1)

Se $y = f(x)$ é uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$, então ela assume neste intervalo máximo e mínimo absolutos.

Teorema 9.1

Seja $y = f(x)$ uma função derivável em $]a, b[$. Se $c \in]a, b[$ é um número para o qual a função $y = f(x)$ assume um máximo local, então $f'(c) = 0$.

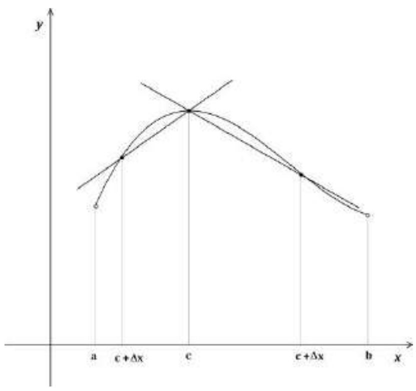
Demonstração:

Inicialmente, tomemos $\Delta x \neq 0$ de tal maneira que $c + \Delta x \in]a, b[$. É claro que Δx pode ser positivo ou negativo. Como a função $y = f(x)$ assume em c um máximo local, pela Definição 9.5, teremos, para um conveniente Δx, $f(c) \geq f(c + \Delta x)$ e, portanto, $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$.

Se $\Delta x > 0$, $\dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$ e, portanto $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \Rightarrow f'(c) \leq 0$ (1)

Se $\Delta x < 0$, $\dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0$ e, portanto $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0 \Rightarrow f'(c) > 0$ (2)

De (1) e (2), tem-se que $f'(c) = 0$.



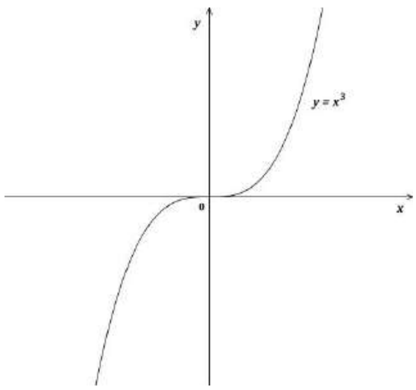
A figura ao lado ilustra o raciocínio empregado na demonstração.

De forma semelhante, podemos enunciar o teorema correspondente para mínimo local, cuja prova deixamos aos cuidados do leitor.

Teorema 9.2

Seja $y = f(x)$ uma função derivável em $]a, b[$. Se $c \in]a, b[$ é um número para o qual a função $y = f(x)$ assume um mínimo local, então $f'(c) = 0$.

Os teoremas 9.1 e 9.2 indicam que: se num intervalo aberto $]a,b[$ ocorrerem pontos de máximo ou de mínimo locais ou absolutos de uma função derivável eles serão *Pontos Críticos*, isto é, valores para os quais a derivada da função é nula. Cuidados devem ser tomados para que não ocorram decisões precipitadas, pois o fato de um ponto ser crítico não significa ser ele de máximo ou de mínimo local. Observe o leitor que não há nenhuma situação ardilosa, a única coisa que está por detrás é uma boa interpretação dos teoremas e das definições.



Um exemplo da situação descrita anteriormente é dado pela função

$$y = x^3.$$

O ponto $x = 0$ é um ponto crítico que não é nem de máximo e nem de mínimo.

Exercício 9.3

Encontre os pontos críticos de:

1) $f(x) = x^3 - 4x$
2) $f(x) = senx + cosx,\ \ em\ [0,2\pi]$
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$
4) $f(x) = ln(senx),\ \ em\ ]0,\pi[$
5) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x$
6) $f(x) = x^4 - 2x^2$
7) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 36$
8) $f(x) = x^3 - 2x^2$

Os resultados apresentados, embora úteis para o estudo de máximos e mínimos, na verdade não espelham ainda o comportamento global de uma função. Relembremos, mais uma vez, que no exemplo físico, dado inicialmente, a variação da velocidade reflete todo o comportamento da equação do movimento e esse é o ponto que queremos chegar. Pretendemos que a variação da derivada reflita o comportamento da função. Atingiremos este objetivo com a aplicação de um dos mais úteis teoremas do Cálculo: *o Teorema do Valor Médio.* Esse teorema é uma ferramenta poderosa e indispensável para a sequência de nosso estudo e, para a sua demonstração, necessitaremos de um resultado auxiliar.

Lema 9.1 (Teorema de Rolle)

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Se $f(a) = f(b) = 0$, então existe $c \in]a,b[$ para o qual $f'(c) = 0$.

Demonstração:

Se a função for constante, então $f(x) = 0, \forall x \in [a,b]$ e, portanto, $f'(x) = 0, \forall x \in]a,b[$ e, assim, c poderá ser qualquer ponto do intervalo $]a,b[$.

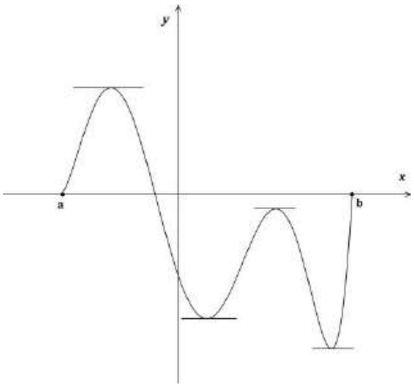
Se a função não for constante significa que, para algum $x_0 \in]a,b[$, teremos $f(x_0) \neq 0$. Como $y = f(x)$ é contínua em $[a,b]$ ela tem máximo e mínimo absolutos nesse intervalo. Se $f(x_0) > 0$ o máximo absoluto de $y = f(x)$ também será maior do zero e, consequentemente, ocorrerá em algum $c \in]a,b[$. Logo, esse máximo absoluto será, também, um máximo local e pelo teorema 9.1 concluímos que $f'(c) = 0$.

Por outro lado, se $f(x_0) < 0$, o ponto crítico em questão é o ponto de mínimo absoluto de $y = f(x)$.

Exercício 9.4

Mostre que a conclusão do Teorema de Rolle ainda é válida quando consideramos que $f(a) = f(b) = k$, para $k \in \mathbb{R}$.

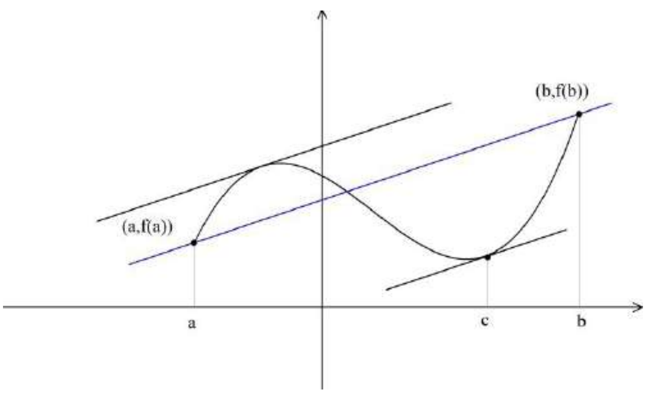
O Teorema de Rolle afirma que, dada uma função satisfazendo aquelas especificações quanto à continuidade e derivabilidade, existe algum ponto c para o qual $f'(c) = 0$. Isto significa, geometricamente, que naquelas condições toda função possui em algum ponto uma tangente horizontal. Uma ilustração vem a seguir.



O exemplo mostra uma função contínua em $[a,b]$, derivável em $]a,b[$, com $f(a) = f(b) = 0$.

Existem, no caso, quatro pontos nos quais a derivada é zero.

O Teorema do Valor Médio generaliza o Teorema de Rolle, no sentido de retirar a hipótese $f(a) = f(b) = 0$ e mostra que toda função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$ possui, em algum ponto do intervalo $]a,b[$, uma reta tangente paralela à reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



A figura ao lado ilustra esse fato. A reta passando por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ possui coeficiente angular dado por

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e o da reta tangente em $x = c$ é dado por $f'(c)$. Sendo as duas retas paralelas, teremos:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Observação: Na figura ocorrem dois pontos em que a reta tangente é paralela à reta que passa por $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))$ e $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}))$.

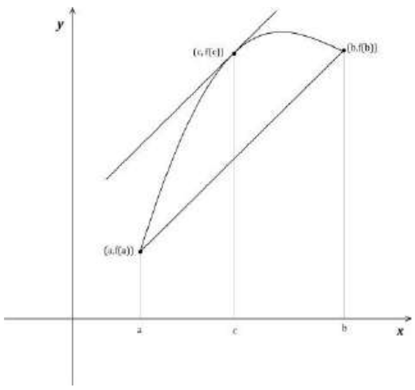
Iremos agora enunciar e demonstrar o teorema:

Teorema 9.3 (Teorema do Valor Médio)

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Então existe $c \in]a, b[$ para o qual

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração:



Usando a figura ao lado procuraremos construir uma função que satisfaça o Teorema de Rolle. Comecemos por escrever a equação da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Essa reta tem por equação:

$$h(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

Consideremos agora a função diferença:

$$g(x) = f(x) - h(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

ou

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Da função $g(x)$, podemos afirmar:

1º) como uma função diferença entre duas funções contínuas em $[a, b]$, a função $g(x)$ é contínua em $[a, b]$;

2º) por ser, também, uma diferença entre duas funções deriváveis em $]a, b[$, a função $g(x)$ é derivável em $]a, b[$;

3º) também $g(a) = g(b) = 0$.

Portanto, a função $g(x)$ satisfaz todas as hipóteses do Teorema de Rolle e, assim, existe $c \in]a, b[$ satisfazendo a condição $g'(c) = 0$. Como

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad \forall x \in]a, b[\,,$$

teremos para $x = c$:

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Daí, concluímos que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o que completa a demonstração.

Exercício 9.5

Quais das funções abaixo satisfazem as condições exigidas pelo Teorema do Valor Médio? Para as que satisfazem, encontre os valores de c.

1) $f(x) = |x + 1|\ \ em\ [-2,1]$

2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 1}\ \ em\ \left[\dfrac{3}{2}, 3\right]$

3) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}\ \ em\ [-2.2]$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x}\ \ em\ [-1,2]$

5) $f(x) = x^3 - 3x\ \ em\ \left[0, \sqrt{15}\right]$

Com o auxílio do Teorema do Valor Médio podemos apresentar resultados que caracterizam o comportamento de uma função através de sua derivada. Note que os resultados contidos no teorema que se segue estão presentes na análise do movimento de queda livre feita anteriormente.

Teorema 9.4

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Então podemos afirmar que:

a) se $f'(x) > 0$ para todo $x \in\ ]a, b[$ então f é estritamente crescente em $[a, b]$;
b) se $f'(x) < 0$ para todo $x \in\ ]a, b[$ então f é estritamente decrescente em $[a, b]$;
c) se $f'(x) = 0$ para todo $x \in\ ]a, b[$ então f é constante em $[a, b]$.

Demonstração:

a) Sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer de $[a, b]$, de modo que $x_1 < x_2$. Como f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em$]x_1, x_2[$ podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para afirmar que existe um número c no intervalo $]x_1, x_2[$, tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como $x_2 - x_1 > 0$ e, por hipótese, $f'(c) > 0$, temos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$ e, portanto, concluímos que $f(x_1) < f(x_2)$.

Assim, para quaisquer $x_1, x_2 \in\ ]a, b[$, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$ ou seja, a função f é estritamente crescente em $[a, b]$.

b) Essa demonstração é semelhante à da parte a) e será deixada como exercício.

c) Este resultado já foi usado quando vimos a integral definida (ver Teorema 7.1). Observe que, usando o Teorema do Valor Médio, sua demonstração é simples.

Sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer de $[a, b]$ e suponhamos que $x_1 < x_2$. Como na parte a) teremos:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

para algum c em $]x_1, x_2[$ e, como $f'(c) = 0$ segue que $f(x_2) - f(x_1) = 0$, ou seja, $f(x_2) = f(x_1)$.

Como isto pode ser feito para quaisquer dois pontos em $[a, b]$, concluímos que a função f é constante em $[a, b]$.

Ao aplicar os resultados do teorema anterior na análise do comportamento de uma função deve-se observar se a função satisfaz as hipóteses do teorema em questão. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 9.1

Vamos considerar a função $y = f(x)$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x < 1 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$$

Observe que $f'(x) = 0$ para $x < 1$ e, também, para $x > 2$ e, no entanto, $y = f(x)$ não é um função constante. O fato a ser observado é a descontinuidade da função.

Exercício 9.6

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Mostre que:

1) se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in\ ]a, b[$ então f é crescente em $[a, b]$;

2) se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in\ ]a, b[$ então f é decrescente em $[a, b]$.

Exemplo 9.2

Mostrar que $senx < x$, para $0 < x < \pi/2$.

Considerando a função auxiliar $g(x) = senx - x$, a solução do nosso problema consiste em mostrar que $g(x) < 0$ para $0 < x < \pi/2$.

Como $g'(x) = cosx - 1 < 0$, no intervalo dado concluímos, pelo Teorema 9.4, que a função $g(x) = senx - x$ é estritamente decrescente em $[0, \pi/2]$ e, portanto, o seu maior valor é $g(0) = 0$. Daí resulta que $g(x) < 0$ para $0 < x < \pi/2$. Logo $senx < x$ no intervalo dado.

Exercício 9.7

1) Mostre que $tgx > x$, para $0 < x < \pi/2$

2) Mostre que $lnx < x$, para $x > 0$

Exemplo 9.3

Consideremos a função $y = f(x)$, definida no intervalo $[-2, \infty[$, dada por

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x.$$

Vamos verificar onde $y = f(x)$ é crescente ou decrescente e se tem máximos ou mínimos locais e absolutos.

Da derivada dessa função observamos que:

a) os valores $x = -1$ e $x = 3$ são pontos críticos;
b) $f'(x) > 0$ para $-2 < x < -1$ e, também, para $x > 3$;
c) $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 3$.

Conhecendo estas informações sobre a função, podemos concluir:

1) a função é estritamente crescente nos intervalos $[-2 - 1]$ e $[3, \infty[$;
2) a função é estritamente decrescente no intervalo $[-1,3]$;
3) a função tem um máximo local em $x_0 = -1$ visto que ela e crescente para valores menores do que -1 e é decrescente para valores maiores do que -1;
4) a função tem um mínimo local em $x_0 = 3$ visto que ela é decrescente para valores menores do que 3 e crescente para valores maiores do que 3;
5) a função não tem máximo absoluto, pois

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty;$$

6) quanto ao mínimo absoluto este pode ocorrer no ponto de mínimo local ou nos extremos do intervalo. Para concluir vamos comparar os valores de $f(-2)$ e $f(3)$ e como $f(-2) = -2$ e $f(3) = -27$, o mínimo absoluto da função ocorre em $x = 3$.

Exercício 9.8

Determine os pontos críticos da função dada, estude onde ela é estritamente crescente ou decrescente e, com base nisto, encontre todos os máximos e mínimos relativos e absolutos da função.

1) $f(x) = x^3 - 4x$

2) $f(x) = senx + cosx, x \in [0,2\pi]$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3}$

4) $f(x) = ln(senx), x \in (0, \pi)$

5) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x, x \in [-5,3[$

6) $f(x) = x^4 - 2x^2$

7) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 36, x \in [-2,2]$

8) $f(x) = x^3 - 2x^2, x \in [-2,1]$

9) $y = \dfrac{3}{4}x^4 - 81x, x \in]-2,4]$

10) $y = 3x - x^3, x \in \left[-\sqrt{3}, \dfrac{3}{2}\right]$

11) $y = x^3 - 2x + 1, x \in]-\infty, \infty[$

12) $y = x^3 - 2x + 1, x \in [-1,4]$

13) $y = sen 2x, x \in]0,2\pi[$

14) $y = \dfrac{1}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$

Apresentaremos agora outro método para decidir se um ponto é de máximo ou mínimo local. Para tanto introduziremos duas definições.

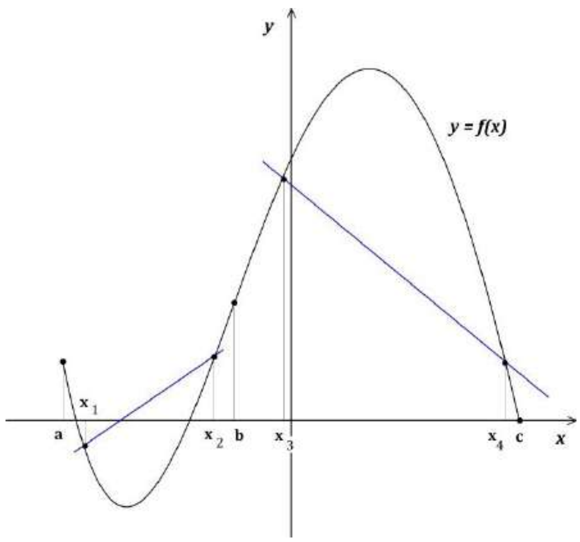
Definição 9.7

Diz-se que uma função $y = f(x)$ é convexa para cima em $]a, b[$, se para quaisquer dois pontos x_1 e x_2 em $]a, b[$ o segmento de reta que une $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ estiver acima do gráfico de $y = f(x)$ em $]x_1, x_2[$.

Definição 9.8

Diz-se que uma função $y = f(x)$ é convexa para baixo em $]a, b[$, se para quaisquer dois pontos x_1 e x_2 em $]a, b[$ o segmento de reta que une $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ estiver abaixo do gráfico de $y = f(x)$ em $]x_1, x_2[$.

Na figura a seguir, $y = f(x)$ é convexa para cima em $]a, b[$ e convexa para baixo em $]b, c[$.



Analiticamente, $y = f(x)$ convexa para cima em $]a, b[$ implica que:

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in]a, b[$ e $x \in]x_1, x_2[$.

Como seria a interpretação analítica para o caso de $y = f(x)$ se convexa para baixo em $]a, b[$?

O teorema seguinte relaciona a convexidade de uma função $y = f(x)$ com a sua derivada segunda.

Teorema 9.5

Seja $y = f(x)$ uma função duas vezes derivável em $]a, b[$. Então:

a) se $f''(x) > 0$ em $]a, b[$ tem-se que $y = f(x)$ é convexa para cima em $]a, b[$;

b) se $f''(x) < 0$ em $]a, b[$ tem-se que $y = f(x)$ é convexa para baixo em $]a, b[$.

Demonstração:

Provaremos a parte (a) e deixaremos como exercício para o leitor a prova da segunda parte.

Sejam $x_1, x_2 \in]a, b[$, com $x_1 < x_2$, e consideremos a função:

$$\emptyset(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) - f(x), \qquad x \in]x_1, x_2[\quad (1)$$

Devemos mostrar que $\emptyset(x) > 0$, para $x \in]x_1, x_2[$.

Como $y = f(x)$ é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em $]x_1, x_2[$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Logo $\emptyset(x) = f(x_1) + f'(c)(x - x_1) - f(x)$ e, portanto,

$$\emptyset'(x) = f'(c) - f'(x) \text{ para todo } x \in]x_1, x_2[\quad (2)$$

Tendo-se que $x_1 < c < x_2$ iremos fazer duas considerações

a) Tomando-se $x \in [x_1, c]$ e como $y = f(x)$ é duas vezes derivável em $]a, b[$ teremos que $f'(x)$ continua em $[x, c]$ e derivável em $]x, c[$ e, portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c_1 \in]x, c[$ tal que:

$$f''(c_1) = \frac{f'(c) - f'(x)}{c - x}$$

logo

$$f'(c) - f'(x) = f''(c_1)(c - x).$$

Como $f''(c_1) > 0$, teremos $f'(c) - f'(x) > 0$ e, por (2), segue-se que $\emptyset'(x) > 0$ para todo $x \in]x_1, c[$, ou seja, $\emptyset(x)$ é estritamente crescente em $]x_1, c[$. Como, por (1), $\emptyset(x_1) = 0$, concluímos que $\emptyset(x) > 0$ para $x \in]x_1, c]$.

b) Da mesma forma para $x \in [c, x_2]$ teremos a existência de $c_2 \in]c, x[$, tal que

$$f'(x) - f'(c) = f''(c_2)(x - c) \text{ ou } f'(c) - f'(x) = -f''(c_2)(x - c).$$

Como $f''(c_2) > 0$, teremos $f'(c) - f'(x) < 0$ e, por (2), segue-se que $\emptyset'(x) < 0$ para todo $x \in]c, x_2[$, ou seja, $\emptyset(x)$ é estritamente decrescente em $]c, x_2[$. Como, por (1), $\emptyset(x_2) = 0$, concluímos que $\emptyset(x) > 0$ para $x \in [c, x_2[$.

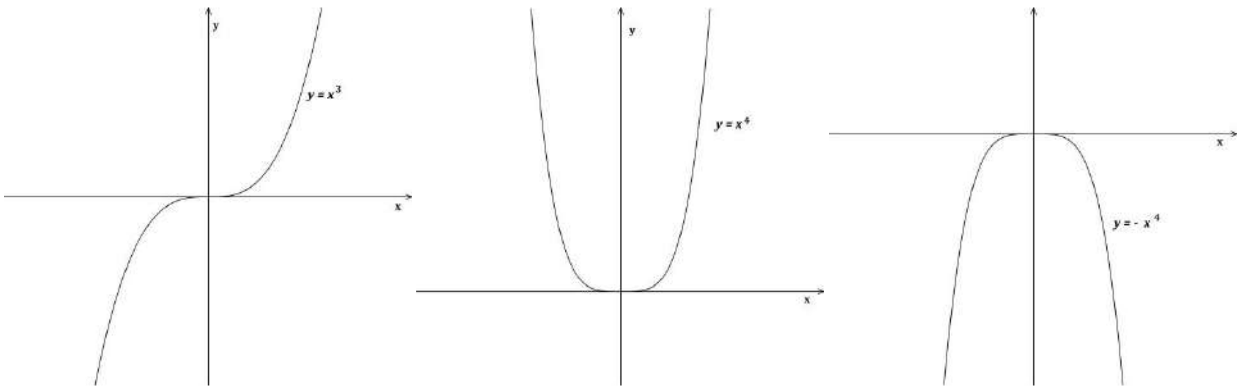
Das partes (a) e (b) obtemos que $\emptyset(x) > 0, \forall x \in]x_1, x_2[$. Isto mostra que a função $y = f(x)$ é convexa para cima em $[a, b]$ quando $f''(x) > 0$ neste intervalo.

Decorre desse teorema que se x_0 for ponto crítico de uma função $y = f(x)$ duas vezes derivável em $]a, b[$ e se, além disso, $f''(x) > 0$ em $]a, b[$ então x_0 é um ponto de mínimo local dessa função. Nas condições anteriores, mas com $f''(x) < 0$ em $]a, b[$, teremos que x_0 é um ponto de máximo local dessa função. Na prática para decidir se um ponto crítico é de máximo ou mínimo local de uma função basta olhar o sinal da derivada segunda em x_0. Isto pode ser feito desde que $f''(x)$ seja contínua num intervalo aberto contendo x_0.

Uma pergunta que surge naturalmente: o que se pode falar acerca do comportamento local de uma função em x_0 quando $f''(x_0) = 0$. Vamos mostrar exemplos de três situações em isto ocorre. Para isso consideremos as funções:

$$y = x^3, \;\; y = x^4 \;\; e \;\; y = -x^4$$

que possuem a propriedade de ter a primeira e a segunda derivadas nulas em $x = 0$. Observe seus gráficos a seguir:



Note-se que o comportamento em $x = 0$ é bem diferente para cada função. No segundo caso temos um mínimo local, no último caso temos um máximo local, enquanto no primeiro caso $x = 0$ não é máximo e nem mínimo local.

Os casos exibidos são mostras de que na ocorrência de $f''(x_0) = 0$ para algum x_0 do domínio de $y = f(x)$, torna-se necessário investigar o sinal da segunda derivada em torno de x_0, ou seja, em algum intervalo aberto I tal que $x_0 \in I$, para se concluir sobre o comportamento local da função em x_0. Caso $f''(x_0) > 0, \forall x \in I, x \neq x_0$, podemos afirmar que x_0 é um ponto de mínimo local. Quando seria um ponto de máximo local? Critérios como estes são justificados pela continuidade das funções envolvidas.

No caso do primeiro gráfico dado anteriormente a derivada segunda é negativa quando $x < 0$ e positiva quando $x > 0$. Logo, $x = 0$, é um ponto onde a função mudou de convexidade, ou seja, antes de $x = 0$ o gráfico é convexo para baixo e, depois, é convexo para cima. Pontos assim serão caracterizados pela seguinte definição:

Definição 9.9

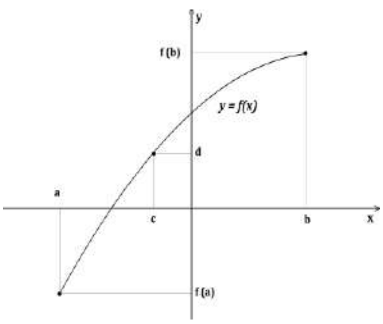
Seja $y = f(x)$ uma função contínua em x_0. Diz-se que x_0 é um ponto de inflexão se, em x_0, ocorrer uma mudança de convexidade de $y = f(x)$.

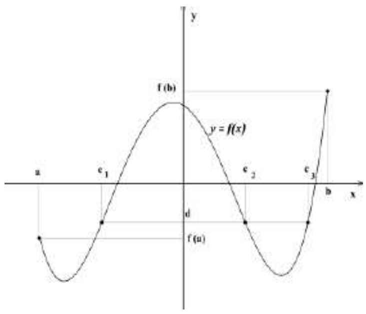
Para completarmos a teoria necessária às aplicações de derivadas que pretendemos enunciaremos, agora, um teorema cuja demonstração, por exigir um contexto teórico mais apurado do que desejamos neste texto, não será apresentada.

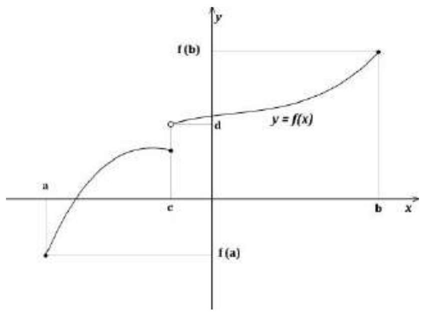
Teorema 9.6 (Teorema do Valor Intermediário)

Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ e seja d um número entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe pelo menos um número $c \in\,]a, b[$ tal que $f(c) = d$.

O que o Teorema do Valor Intermediário diz é que se uma função contínua assumir dois valores distintos ela assumirá, então, todos os valores entre esses dois pontos. O significado geométrico do teorema pode ser visto nas duas primeiras figuras seguintes. Sem a hipótese de continuidade o resultado mostrado pelo teorema não se garante, como é mostrado na terceira figura a seguir.







Como consequência deste teorema podemos afirmar que: se $f''(x)$ for contínua em $]a, b[$ e se $x_0 \in\,]a, b[$ for um ponto de inflexão de $y = f(x)$ então $f''(x_0) = 0$.

O Teorema do Valor Intermediário é muito útil na determinação de zeros de uma função e na construção de gráficos de funções. Neste particular, é ele que justifica a interpretação geométrica, apresentada no Capítulo 4, de que o gráfico de uma função contínua num intervalo não sofre interrupções nesse intervalo.

Exemplo 9.4

Mostraremos que a equação $x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ possui uma raiz r no intervalo $[-4, -3]$.

Basta observar que a função $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ é contínua em $[-4, -3]$, pois é uma função polinomial e, além disso, $f(-4) = -15$ e $f - 3) = 1$. Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um número r, $-4 < r < -3$, tal que $f(r) = 0$.

Você pode mostrar, ainda, que: $-4/3 < r < -3$.

Exercício 9.9

1) Dada a função

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2$$

verifique que $f'(x)$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo $[0,4]$ e mostre que $f'(x)$ tem um ponto crítico neste intervalo.

2) Seja $y = f(x)$ contínua e tal que $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = 2$ e $f(x_3) = -4$, com $x_1 < x_2 < x_3$. Existem c e d, com $x_1 < c < d < x_3$, de modo que $f(c) = f(d)$? Justifique a sua resposta.

3) Seja $y = f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, com $f(a) = f(b) = 0$ e seja

$$A(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Mostre que existe c, $a < c < b$, de modo que $A''(c) = 0$.

4) Mostre que existe um único número x tal que $lnx + x = 0$.

5) Seja $y = f(x)$ contínua em $[a, b]$. Mostre que existe um valor $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b - a).$$

Este resultado é conhecido como sendo Teorema da Média.

Sugestão:

Lembre-se primeiramente que

$$\boldsymbol{m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx < M}$$

onde $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{M}$ são, respectivamente, mínimo e máximo absolutos de $\boldsymbol{y = f(x)}$ em $\boldsymbol{[a, b]}$ e use depois o Teorema do Valor Intermediário.

6) Qual é a interpretação geométrica do Teorema da Média para o caso em que $f(x) > 0$? O Teorema da Média vale se $b < a$?

9.2 Construção de Gráficos de Funções

Uma das aplicações interessantes dos resultados anteriores é a construção de gráficos de funções. Para esboçar de forma mais precisa o gráfico de uma função é necessário conhecer suas propriedades geométricas, ou seja, saber os pontos onde o gráfico da função corta os eixos coordenados, os pontos críticos, regiões de crescimento ou de decrescimento, máximos e mínimos locais e absolutos, inflexões e convexidades, além do cálculo de alguns limites que, em geral, envolvem os extremos dos intervalos onde as funções encontram-se definidas. Os teoremas estudados neste capítulo nos dão condições de obter essas informações.

Utilizaremos um esquema para orientar a construção de gráficos e mostraremos como usá-lo em três casos particulares. Resumidamente, esse esquema leva em conta a determinação dos seguintes itens:

1) Domínio da função e interseção com os eixos coordenados;
2) Pontos críticos;
3) Regiões de crescimento e de decrescimento;
4) Máximos e mínimos locais;
5) Convexidades e pontos de inflexão;
6) Cálculo de limites necessários.

O item (6) significa que:

a) Se a função estiver definida no conjunto $\mathbb{R}$, devemos verificar o que ocorre com:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \;\text{ e }\; \lim_{x\to\infty} f(x)$$

b) Se função estiver definida em um intervalo $[a,b]$, devemos calcular $f(a)$ e $f(b)$.
c) Se a função estiver definida em um intervalo $]a,b[$, devemos verificar os

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \;\; e \;\; \lim_{x\to b^-} f(x)$$

d) Se f' ou f'' não estiverem definidas em determinados pontos, devemos verificar o que ocorre com os limites laterais da função nesses pontos.

Enfim, o que deve ser olhado neste item (6) vai depender da função que está sendo analisada e o colocamos no esquema mais como lembrete.

Exemplo 9.5

Vamos esboçar o gráfico da função

$$y = \frac{x^2+9}{x^2-4}$$

1) Domínio e interseção com eixos.

a) $Dom\, f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -2 \; e \; x \neq 2\}$

b) Interseção com *eixo-y*: $x = 0 \Rightarrow y = -9/4$

c) Não intercepta o *eixo-x* (por quê?)

2) Pontos Críticos

Sendo

$$y' = \frac{-26x}{(x^2-4)^2}$$

temos que $x = 0$ é o único ponto crítico e, neste ponto, $y = -9/4$.

3) Regiões de crescimento e de decrescimento.

a) A função é estritamente crescente em $]-\infty,-2[$ e em $]-2,0]$, pois $y' > 0$ em $]-\infty,-2[$ e em $]-2,0[$.

b) A função é estritamente decrescente em $[0,2[$ e em $]2,\infty[$, pois $y' < 0$ em $]0,2[$ e em $]2,\infty[$.

4) Máximos e mínimos locais

De (2) e (3) concluímos que $x = 0$ é ponto de máximo local e que y não tem mínimo local.

5) Convexidades e pontos de inflexão.

Sendo

$$y'' = \frac{78x^2+104}{(x^2-4)^3}$$

o sinal de y'' irá depender apenas do denominador, uma vez que o numerador é sempre positivo.

a) A função y é convexa para cima quando $y'' > 0$ e, portanto, quando $x^2 - 4 > 0$. Isto ocorrerá nos intervalos $]-\infty,-2[$ e $]2,\infty[$.

b) A função y é convexa para baixo quando $y'' < 0$ e, portanto, quando $x^2 - 4 < 0$. Isto ocorrerá no intervalo $]-2,2[$.

c) Como $y'' \neq 0$ em todo o domínio, segue-se que a função não tem ponto de inflexão.

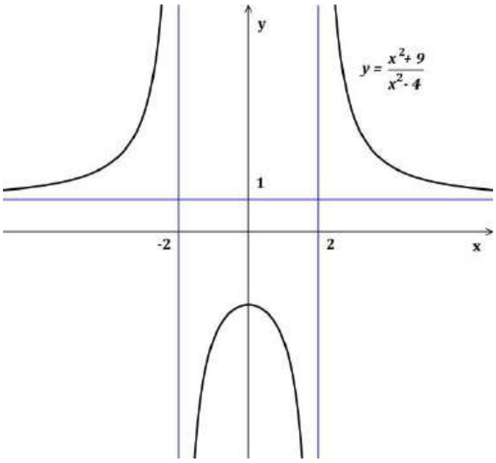
6) Limites

Neste exemplo devemos observar os seguintes limites:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to-2^-} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to2^+} f(x) = \infty$$

Tendo em vista as informações sobre o gráfico da função dada podemos, então, esboça-lo como segue:



Exemplo 9.6

Vamos esboçar o gráfico da função

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

1) Domínio e interseções com os eixos coordenados.

a) Domínio: $Dom\, f = \mathbb{R}$

b) Interseções com os eixos: $(0,0)$

2) Pontos críticos

Como a derivada da função é dada por

$$y'' = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

os pontos críticos são $x = -1$ e $x = 1$, determinando os seguintes pontos do gráfico $(-1, -1/2)$ e $(1, 1/2)$.

3) Regiões de crescimento e de decrescimento.

A função é estritamente crescente em $(-1,1)$ e estritamente decrescente em $(-\infty, -1)$ e em $(1, \infty)$.

4) Máximos e mínimos locais.

A função assume um mínimo local em $x = -1$ e um máximo local em $x = 1$.

5) Convexidades e pontos de inflexão.

A derivada segunda da função é dada por

$$y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^2}$$

logo y é convexa para cima em $\left(-\sqrt{3},0\right)$ e em $\left(\sqrt{3}.\infty\right)$; é convexa para baixo em $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ e em $\left(0,\sqrt{3}\right)$.

Os pontos de inflexão são $x=0$, $x=-\sqrt{3}$ e $x=\sqrt{3}$, determinando os seguintes pontos do gráfico:

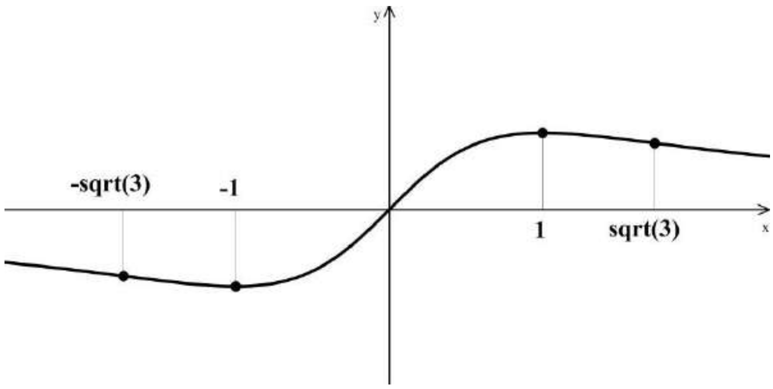
$$\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right), (0,0) \text{ e } \left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

6) Limites.

Para esta função é necessário o estudo dos seguintes limites:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0.$$

Reunindo as informações podemos traçar o seguinte gráfico:



Observação: os símbolos -sqrt(3) e sqrt(3) significam, respectivamente, $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$.

Exemplo 9.7

Vamos esboçar agora o gráfico da função

$$y = x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}(x+1)$$

1) Domínio e interseções com eixos.

a) Domínio: $Dom\ f = \mathbb{R}$

b) Interseção com $eixo-y$: $x=0 \Rightarrow y=0$

c) Interseção com $eixo-x$: $y=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x}(x+1)=0 \Rightarrow x=0$ ou $x=-1$.

2) Pontos críticos

Como a derivada da função é dada por

$$y' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(4x+1) = \frac{4x+1}{3x^{\frac{2}{3}}}, \ \ x \neq 0$$

teremos:

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(4x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}\cdot$$

Portanto o único ponto crítico é $x = -1/4$, determinando no gráfico o ponto

$$\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right)^{1/3}\right)\cdot$$

3) Regiões de crescimento de decrescimento
a) Quando $y' > 0$, teremos:

$$\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}(4x+1) > 0$$

e como $x^{2/3} > 0$, para todo x, concluímos que $4x+1 > 0$, ou seja, y é estritamente crescente no intervalo $(-1/4, \infty)$.

b) Quando $y' < 0$, teremos:

$$\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}(4x+1) < 0$$

e como $x^{2/3} > 0$, para todo x, concluímos que $4x+1 < 0$, ou seja, y é estritamente decrescente no intervalo $(-\infty, -1/4)$.

4) Máximos e mínimos locais.

A função assume em $x = -1/4$ um mínimo local.

5) Convexidades e pontos de inflexão.

O cálculo da segunda derivada da função dada nos dá a seguinte expressão:

$$y'' = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}(2x-1) = \frac{2(2x-1)}{9x^{\frac{5}{3}}}, \qquad x \neq 0\cdot$$

A análise do quociente que define y'', nos dá:

a) $y'' > 0$ nos intervalos $]-\infty, 0[$ e em $]1/2, \infty[$ e, portanto, a função é convexa para cima nesses intervalos;

b) $y'' > 0$ no intervalo $]0, 1/2[$ e, portanto, a função é convexa para baixo nesse intervalo;

c) os pontos de inflexão são $x = 0$ e $x = 1/2$, determinando no gráfico os pontos:

$$(0,0) \quad e \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right), onde\ \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}2.$$

6) Limites.

Essa função apresenta um aspecto importante que é caracterizado pelo fato dela ter a sua derivada não definida em $x = 0$. Em casos como este, além da necessidade de se estudar os limites da função relativos ao seu domínio, é preciso estudar o comportamento da derivada em torno do ponto onde ela não está definida. Portanto iremos estudar os seguintes limites:

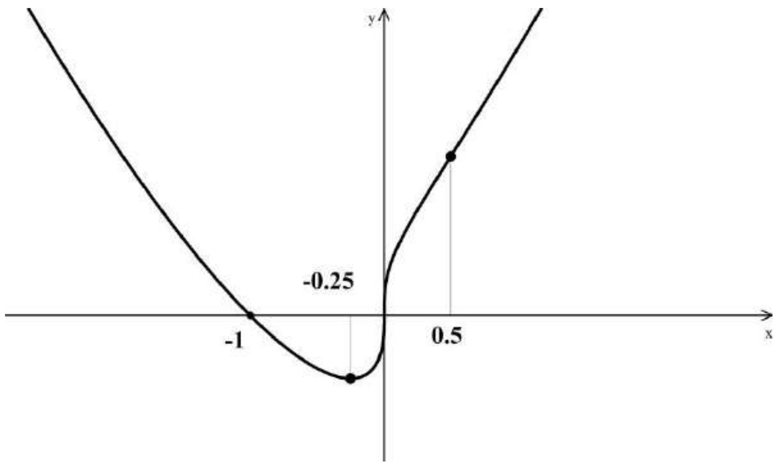
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\right) = \lim_{x \to -\infty} x^{\frac{4}{3}}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\right) = \lim_{x \to \infty} x^{\frac{4}{3}}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{4x + 1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{4x + 1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

Geometricamente, os dois últimos limites querem dizer que as inclinações das retas tangentes a $y = f(x)$ estão tendendo a ∞ quando $x \to 0$, tanto pela direita como pela à esquerda. Desta forma concluímos que a reta tangente à curva dada, em $x = 0$, é vertical.

O esboço do gráfico de $y = x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{1}{3}}$ é o seguinte:



Exercícios 9.10

Esboce o gráfico das funções a seguir:

1) $y = \dfrac{2}{x^2+4}$

2) $y = \dfrac{3x}{x^2+2}$

3) $y = \dfrac{x^2-4}{x-1}$

4) $y = \dfrac{4-x^2}{x+1}$

5) $y = \dfrac{x^2-4}{x+1}$

6) $y = \dfrac{x^2-9}{x+1}$

7) $y = x^4 - 2x^2$

8) $y = x^4 - 5x^2 + 4$

9) $y = \dfrac{x^3+1}{x+1}$

10) $y = \dfrac{x^2-2}{x+1}$

11) $y = \dfrac{x+1}{x^2-5}$

12) $y = \dfrac{2x}{x+4}$

13) $y = \dfrac{2x^2-3}{3x^2+5}$

14) $y = \dfrac{2x^2-1}{x^2-2}$

15) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-4}$

16) $y = \dfrac{x^2-4}{x+2}$

17) $y = (x-1)^{\frac{2}{3}} + 1$

18) $y = x^4 - 2x^3$

19) $y = 1 + (x-1)^{\frac{1}{3}}$

20) $y = -x^3 + 2x + 5$

21) $y = 1 + (x-1)^{\frac{5}{3}}$

22) $y = \dfrac{x^2-4}{x^3}$

23) $y = \sqrt{x+5}$

24) $y = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$

25) $y = (x+1)\sqrt{x}$

26) $y = (x+1)\sqrt{1-x}$

27) $y = x\sqrt{4-x^2}$

28) $y = (x+1)\sqrt{-x}$

29) $y = senx, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

30) $y = cosx, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

31) $y = tgx, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

32) $y = cotgx, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

33) $y = secx, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

34) $y = cossecx, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

35) $y = sen^2x, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

36) $y = cos^2x, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

37) $y = tg^2x, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

38) $y = sen2x, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

39) $y = sen\dfrac{x}{2}, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

40) $y = senx + cosx, \quad 2\pi \leq x \leq 2\pi$

41) $y = x - senx, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

42) $y = x - cosx, \quad -2\pi \leq x \leq 2\pi$

Observação:

Nos exercícios 31 a 34 e 37, deixamos ao encargo do leitor descartar os pontos do intervalo dado, onde as respectivas funções não se encontram definidas.

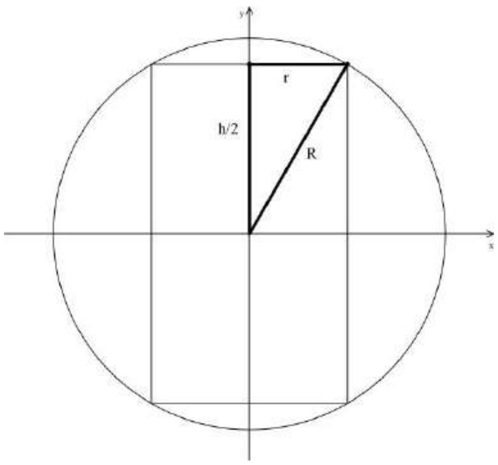
9.3 Máximos e Mínimos

Uma aplicação de natureza bastante prática dos conteúdos desenvolvidos neste capítulo constitui os processos de solução dos chamados *problemas de máximo e mínimo.*

Abordaremos nesta seção alguns tipos desses problemas envolvendo situações físicas e geométricas.

Exemplo 9.8

Encontrar as dimensões do cilindro reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio R.



A figura ao lado representa um corte transversal, apresentando um círculo maior da esfera e o retângulo nele inscrito. Imaginando que a figura possa girar em torno do *eixo vertical* teremos a figura espacial idealizada.

O volume de um cilindro reto de raio r e altura h é dado por $V = \pi r^2 h$ e o nosso problema consiste em obter o máximo absoluto de V, que depende de r e h, restrito às condições impostas pela esfera de raio fixo R.

Vamos escrever V como função de uma única variável. Para tanto, observe na figura que:

$$\frac{h^2}{4} + r^2 = R^2 \text{ ou } r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}.$$

Substituindo o valor de r em V, teremos :

$$V(h) = \pi R^2 h - \frac{\pi h^3}{4}, \text{onde } 0 < h < 2R.$$

Como fizemos no Exemplo 9.3 para $y = f(x)$, vamos encontrar o máximo absoluto de $V(h)$.

$$\frac{dV}{dh} = \pi R^2 - \frac{3\pi h^2}{4}$$

$$\frac{dV}{dh} = 0 \Rightarrow \pi R^2 - \frac{3\pi h^2}{4} = 0 \Rightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

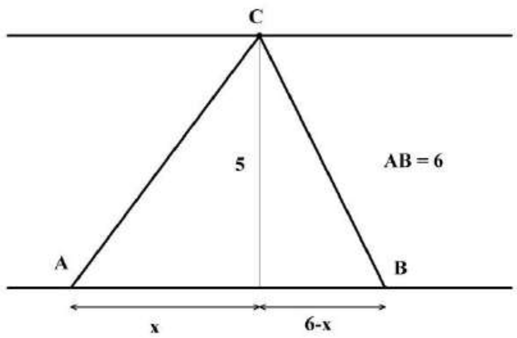
Como

$$\frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{3\pi h}{2}\text{, e no ponto } h = \frac{2R}{\sqrt{3}} \text{ teremos } \frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{3\pi R}{\sqrt{3}} < 0.$$

Portanto, o ponto dado é um ponto de máximo local. Será, também, o máximo absoluto por ser o único ponto crítico da função $V(h)$ no intervalo.

Exemplo 9.9

Um barco vai de um ponto A até um ponto B, situado na mesma margem de um rio, 6km abaixo. A largura do rio é de 5km. Admitindo-se que o barco não suba o rio, encontrar o maior e o menor percurso que pode ser feito pelo barco, sabendo-se que deve ser feito um embarque na margem oposta antes de ancorar no ponto B.



Se S é a distância percorrida pelo barco, então $S = AC + BC$.

Como

$$AC = \sqrt{x^2 + 25} \quad e \quad CB = \sqrt{(6-x)^2 + 25}$$

teremos

$$S = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{(6-x)^2 + 25}, \qquad 0 \leq x \leq 6.$$

Derivando e igualando a zero, obtemos

$$\frac{dS}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} - \frac{6-x}{\sqrt{(6-x)^2 + 25}} = 0.$$

Resolvendo a equação

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}}\right)^2 = \left(\frac{6-x}{\sqrt{(6-x)^2 + 25}}\right)^2$$

teremos que $x = 3$ é o único ponto crítico e é um ponto de mínimo local (por quê?).

Como a função $S(x)$ é contínua no intervalo fechado $[0,6]$ ela tem máximos e mínimos absolutos, que ocorrem nos máximos e mínimos locais ou nos extremos do intervalo.

Observamos que:

a) $S(0) = 5 + \sqrt{61}$ é máximo absoluto, portanto corresponde à maior distância;
b) $S(3) = 2\sqrt{34}$ é o mínimo absoluto, portanto corresponde à menor distância;
c) $S(6) = 5 + \sqrt{61}$ é máximo absoluto, portanto corresponde à maior distância.

Exercício 9.11

Resolva os problemas:

1) Deseja-se construir uma caixa sem tampa em forma de cilindro reto de volume dado. Determine as dimensões de maneira que a área seja a menor possível.

2) Deseja-se construir uma caixa com tampa em forma de paralelepípedo, com base quadrada, de volume V. Sabendo-se que o material da tampa é três vezes mais caro que o das outras faces, determine as dimensões mais econômicas.

3) Um arame medindo 36cm deve ser cortado em duas partes. Uma delas vai ser dobrada em forma de um quadrado e a outra em forma de um triângulo equilátero. Onde deve ser cortado o arame para a soma das áreas das figuras seja mínima? E para que essa soma seja máxima?

4) Prove que entre todos os retângulos de mesma área o quadrado é o que tem o menor perímetro.

5) Prove que entre todos os retângulos de mesmo perímetro o quadrado é o que tem a maior área.

6) Achar os pontos da hipérbole $x^2 - y^2 = 4$ mais próximos do ponto de coordenadas $]0, -2[$.

7) Considere uma barraca em forma de cone. Encontre a altura e o raio da base para que esta barra contenha o maior volume com o material fixo. Considere o piso do mesmo material da cobertura (a área lateral do cone é dada por $\pi r g$ onde g é a geratriz do cone e r o raio da base).

8) Deve-se destacar uma região retangular de área fixa à margem de um rio. Sabendo-se que o rio pode ser utilizado como o limite natural, quais devem ser as dimensões do campo para que se gaste a menor quantidade de cerca?

9) Sabendo-se que a soma dos quadrados de dois números é 1, encontre-os de maneira que a diferença dos quadrados deles seja:

a) máxima;
b) mínima.